Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Existencia y decaimiento de la solución débil de la ecuación viscoelástica

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Emilio Marcelo CASTILLO JIMÉNEZ

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2017

Referencia bibliográfica

Castillo, E. (2017). *Existencia y decaimiento de la solución débil de la ecuación viscoelástica*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

1512

7(P)

50

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 17... horas del día jueves veinte de julio del dos mil diecisiete, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra e integrado por los siguientes miembros: Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (Jurado Evaluador); Dra. María Natividad Zegarra Garay (Jurado Evaluador); Mg. Adrián Guillermo Aliaga Llanos (Jurado Informante) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Jurado Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA Y DECAIMIENTO DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE LA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA» presentada por el Bachiller Emilio Marcelo Castillo Jiménez, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Emilio Marcelo Castillo Jiménez respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Emilio Marcelo Castillo Jiménez aprobado con el calificativo de .... Diecisiete.....(17)..............

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Emilio Marcelo Castillo Jiménez.

Siendo las 17:50. horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Presidente

Mg. Adrián Guillermo Aliaga Llanos
Miembro

Dra. María Natividad Zegarra Garay
Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

EXISTENCIA Y DECAIMIENTO DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE LA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA.

por:

Emilio Marcelo CASTILLO JIMÉNEZ

Tesis presentada a consideración del jurado examinador nombrado por la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos como parte de los requisitos para obtener el grado académico de **Magister en Matemática Pura**.

Aprobada por:

Dr. Carlos Alberto PEÑA MIRANDA
Miembro

Dr. Alfonso PEREZ SALVATIERRA
Presidente

Mg. Adrian Guillermo ALIAGA LLANOS
Miembro

Dr. Maria Natividad ZEGARRA GARAY
Miembro

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA
Miembro Asesor

LIMA - PERÚ

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

CASTILLO JIMÉNEZ, EMILIO MARCELO

Existencia y decaimiento de la Solución débil de la ecuación Viscoelástica, (Lima) 2017

VII, 50p. , 29.7cm, (UNMSM, Magister, Matemática Pura, 2017) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Unidad de Posgrado I. UNMSM/FCM II. Título (Series).

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres
Juvenal Castillo Guerrero y
Maria Jiménez Adriano.

AGRADECIMIENTO

A nuestro creador de toda la existencia de las cosas, por permitirme disfrutar de esta vida

A mis padres, por darme la vida y haberme enseñado a vivir

A mis hermanas, por su constante apoyo económico y concejos siempre acertados

A mi asesor, por su profunda paciencia, por su apoyo incondicional y confianza en mí

A mis amigos y colegas de la Facultad de Ciencias Matemáticas, principalmente a la base 90.

RESUMEN

Existencia y decaimiento de la solución débil de la ecuación viscoelástica.

Emilio Castillo Jiménez

Julio, 2017

Asesor : **Dr. Eugenio Cabanillas Lapa**

Grado obtenido : **Magister en Matemáticas**

En este trabajo, consideramos la ecuación viscoelástica

$$\left\| \begin{array}{ll} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s) = 0 & \text{en } \Omega\times]0,+\infty[\\ \quad u(x,t) = 0 \quad , & \text{en } \Gamma\times]0,+\infty[\\ \quad u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x)\,; & \qquad x \in \Omega \end{array} \right.$$

con condiciones de frontera de Dirichlet y datos iniciales dadas, donde Ω es un abierto acotado, bien regular de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ con frontera Γ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función positiva, acotada y de clase C^2 tal que $\ell = 1 - \displaystyle\int_0^\infty g d\tau > 0$.

Para funciones positivas no crecientes g, probaremos un teorema de existencia global. Además probaremos que cuando la función relajación g decae exponencialmente las energías de primer y segundo orden de la solución, decaen exponencialmente

PALABRAS CLAVES: Ecuación viscoelastica, Existencia de solución, Decaimiento exponencial.

ABSTRACT

Existence and decay of weak solutions of a viscoelastic equation.

Emilio Castillo Jiménez

Junio, 2017

Assessor : **Dr. Eugenio Cabanillas Lapa**

degree qualification : **Master in Matematics**

In this work, we consider the viscoelastic equation

$$\left\|\begin{array}{ll} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s) = 0 & \text{en } \Omega\times]0,+\infty[\\ \quad u(x,t) = 0 \quad , & \text{en } \Gamma\times]0,+\infty[\\ \quad u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x)\,; & \qquad x \in \Omega \end{array}\right.$$

with initial conditions and Dirichlet boundary conditions. For nonincreasing positive functions g, we prove a global existence theorem. Furthermore we show that when the relaxation function g decay exponentially, the first and the second order energy of the solution decay exponentially.

KEY WORDS: Viscoelastic equation, Existence of solution, Exponential decay.

Índice general

Introducción

Un método muy usual para caracterizar los comportamientos mecánicos de materiales viscoelásticos es através de la curva tensión deformación y que comunmente es obtenida en pruebas experimentales, sujeto a una tensión, todos los materiales se deforman. La descripción del estado de deformación o dislocamiento es objeto de la cinematica y las variables cinemáticas primarias son la deformación y la razón de deformación. La deformación es esencialmente el deslocamiento relativo (no dimensional). Así, la deformación es determinado por los gradientes de deslocamiento y la razón de deformación por gradientes de velocidad que son representados por tensores. El tensor deformación es el tensor razón de deformación; si estas son infinitesimales y las relaciones tenso-deformación son del tipo lineal tenemos comportamiento viscoelastico lineal. En los materiales viscoelasticos, las tensiones internas dependen no solo de la deformación instantanea, sino de toda la historia pasada de la deformación.

Por éste motivo son llamados "materiales de memoria", pues, la deformación influye en el estado presente de la tensión. Para materiales reales la historia más reciente, es más importante del que la más distante (Fading memory).

Para motivar nuestro estudio consideremos una barra homogenea localizada en una región $\Omega \subset \mathbb{R}$. Sea $T > 0$, la coordenada cartesiana de cualquier punto de la barra en el estado natural y

$$u = u(x,t)(x,t) \in \Omega \times]0,T[\tag{1}$$

el deslocamiento longitudinal.

Si $\gamma \equiv \gamma(x,t)$ y $\varepsilon \equiv \varepsilon(x,t)$ son los tensores, tensión y deformación respectivamente, las relaciones que describen el comportamiento viscoelastico de la barra son

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (relación deformación - deslocamiento)} \tag{2}$$

$$\sigma = E\varepsilon(t) + \int_0^t \psi'(t-\tau)\varepsilon(\tau) \text{ (ecuación constitutiva tensión - deformación)} \tag{3}$$

donde ψ es la función relajación.

En (3) asumimos que $\varepsilon(t) = 0 \ \ \forall\, t < 0$. (sugerida por la situación fisica) Si el material está relajado para $t \to -\infty$ el límite inferior en la integral en (3) es $t = -\infty$. La ley del balance del momentum implica

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho f \tag{4}$$

donde $f = f(x,t)$ es una fuerza conocida y ρ es la densidad lineal de la masa.

Por simplicidad admitimos $f = 0$, de (2), (3) y (4) obtenemos:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t \psi'(t-\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau)d\tau \tag{5}$$

Supondremos que la barra está sujeta a las condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & u^0(x) \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = u^1(x) \quad ; \quad x \in \Omega \\ u(x,t) & = & v(x,t) \quad , \quad (x,t) \in \Sigma = \Gamma \times]0,T[\end{array}$$

donde Γ es la frontera de Ω.

En el presente trabajo, supondremos que ψ decrece con el tiempo comenzando de un valor grande y tendiendo para cero, asi mismo:

$$\psi'(t) < 0 \quad \text{ y } \quad \lim_{t\to+\infty} f(x)\psi(t) \tag{6}$$

La hipotesís (6) fue introducida por Volterra [22] y generalizada por Colemann y Noll [4].

La ecuación (3) implica que la tensión en cualquier tiempo t depende de la historia pasada de la deformación, el termino integral es llamado integral hereditária o efecto memoria.

Tomando $\rho = 1 = E$, $g(t) = -\psi'(t)$, nuestro sistema viscoelastico adopta la forma

$$\left\| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau)d\tau = 0 & & \text{en}\, Q \\ u = v & & \text{sobre } \Sigma \\ u(x,0) = u^0(x) \qquad , & \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = u^1(x)\,; & \text{en} \;\; \Omega \end{array} \right. \tag{7}$$

El sistema (7) es un modelo matemático para investigar la propagación de ondas uniaxial, que puede ocurrir como por ejemplo, en una barra viscoelástica.

Observemos que por las condiciones sobre ψ resulta

$$g(t) > 0, \qquad \int_0^\infty g d\tau < \alpha, \qquad \text{con} \quad \alpha \;\; \text{pequeño} \; .$$

y así el sistema (7) tiene carácter hiperbólico.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estableceremos las notaciones, las hipótesis sobre los datos y presentaremos en forma de proposiciones los resultados básicos que serán utilizados en los capítulos posteriores.

1.1. Notaciones Básicas, Resultados Auxiliares y Resultado Principal

1.1.1. Topologías Débil y Débil Estrella

Es conocido que si una topología posee menos abiertos (en relación a la topología de la norma) entonces posee más conjuntos compactos, esta propiedad permite probar resultados de existencia de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales.

Sea E un espacio de Banach con dual $E^{'}$. La topología débil $\sigma(E, E^{'})$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace contínuas a todas las aplicaciones $f \in E^{'}$.

Cuando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x en E según la topología débil denotaremos por $x_n \rightharpoonup x$ en E.

Brevemente presentaremos a seguir, dos topologias que reunen los requisitos mencionados: La topología débil y la topología débil estrella. Estas topologias seran caracterizadas seccionalmente.

Proposición 1.1.1 *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Banach E. Entonces.*

(a) *Si $x_n \rightharpoonup x$ en $E \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\forall f \in E^{'}$*

(b) *Si $x_n \to x$ en E, entonces $x_n \rightharpoonup x$ en E*

(c) *Si $x_n \rightharpoonup x$ en E, entonces $\|x_n\|$ es acotada y $\|x\| \le \lim\limits_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$.*

(d) *Si $x_n \rightharpoonup x$ en E y $f_n \to f$ en $E^{'}$, entonces $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [2 Pág. 35]

Observación 1.1.2 *Si E tiene dimensión finita, entonces las topologías fuerte y débil coinciden.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [2].

Sobre $E^{'}$ tenemos dos topologías: la topología fuerte asociada a la norma, y la topología débil $\sigma(E^{'}, E^{''})$. Podemos tener una tercera topología, para ello; sea $x \in E$ fijo y definimos

$$\begin{aligned} J_x : E^{'} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle J_x, f\rangle_{E^{''},E^{'}} = \langle f, x\rangle_{E^{'},E} \end{aligned}$$

Así, J_x es líneal y continua, por tanto $(J_x)_{x\in E}$ es una familia de elementos de $E^{''}$.

La topología menos fina de $E^{'}$ que hace continuas a todas las aplicaciones de la familia $(J_x)_{x\in E}$ es llamada topología débil estrella, denotada por $\sigma(E^{'}, E)$. Cuando $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f según esta topología, escribimos $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $E^{'}$. Notemos que cuando E es reflexivo ($E = E^{''}$) las topologías débil y débil estrella coinciden.

Tenemos los siguientes resultados.

Proposición 1.1.3 *Sean E un espacio de Banach y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesion de funciones en $E^{'}$. Entonces.*

(a) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $E^{'} \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\forall x \in E$*

(b) *Si* $f_n \longrightarrow f \quad$ *en* E', *entonces* $f_n \rightharpoonup f \quad$ *en* E'

(c) *Si* $f_n \rightharpoonup f \quad$ *en* E', *entonces* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad$ *en* E'

(d) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* E', *entonces* $\|f_n\|$ *es acotada y* $\|f\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$.

(e) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad$ *en* $E' \quad$ *y* $x_n \rightharpoonup x$ *en* E, *entonces* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

Demostración.- Ver [2 Pág. 40].

Proposición 1.1.4 *Sea* E *un espacio de Banach separable y* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones acotada en* E'. *Entonces existe una subsucesión* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge con la topología débil estrella.*

Demostración.- Ver [2 Pág. 50].

Proposición 1.1.5 *Sea* E *un espacio de Banach reflexivo y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada en* E. *Entonces existe una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge con la topología débil.*

Demostración.- Ver [2 Pág. 50].

1.1.2. Espacios $L^p(\Omega)$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como el espacio de las funciones medibles $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|u|^p$ es Lebesgue integrable sobre Ω. La norma en $L^p(\Omega)$ es dado por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Para el caso en que $p = \infty$, definimos $L^\infty(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles que son esencialmente acotadas y

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \ / \ |u(x)| \leq c \quad \text{c.s. en } \Omega\}$$

es una norma en $L^\infty(\Omega)$.

Proposición 1.1.6 *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [2 Pág. 57].

Proposición 1.1.7 ***(Desigualdad de Hölder)*** *Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces se tiene la desigualdad*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [2 Pág. 56].

Cuando $p = 2$, tenemos el espacio $L^2(\Omega)$ que es un espacio de Hilbert dotado del producto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

y la norma inducida, es

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Proposición 1.1.8 ***(Desigualdad de Hölder Generalizada)*** *Sean $f_1, f_2, ..., f_k$, funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, con $1 \leq i \leq k$, donde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_k} \leq 1$. Entonces el producto*

$$f = f_1 \, f_2 \, f_3 ... f_k \in L^p(\Omega) \text{ y } \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|f_3\|_{L^{p_3}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [2 Pág. 57].

Un resultado importante es la proposición siguiente, que permite identificar el dual de $L^p(\Omega)$ con $L^q(\Omega)$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Proposición 1.1.9 ***(Teorema de la Representación de Riesz)*** *Sean $1 < p < \infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces existe una única función $u \in L^q(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \;\; \forall v \in L^p(\Omega)$$

y

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demostración.- Ver [2 Pág. 61].

Ahora cuando $p = \infty$, se tiene

Proposición 1.1.10 *Sea $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ entonces existe una única función $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega)$$

y

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$$

Demostración.- Ver [2 Pág. 63].

Proposición 1.1.11 *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones acotada en $L^p(\Omega)$ y sea $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$. Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *c.s. en* Ω

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \ \forall k \in \mathbb{N}$ *y c.s. en Ω, con $h \in L^p(\Omega)$.*

Demostración.- Ver [2 Pág. 58].

1.1.3. Distribuciones

En el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, para que sea posible resolver problemas donde los datos iniciales no poseen derivadas en el sentido clásico, surge la necesidad de obtener un nuevo concepto de derivada. En 1936 Sobolev introdujo el concepto de derivada débil y presento el aspecto negativo de que no toda función de $L^1_{loc}(\Omega)$ posee derivada en este sentido. Esto ocurre debido a que se exige que la derivada sea una función localmente integrable. En 1945, Schwartz presento el concepto de Distribución que evitó este inconveniente de la derivada débil. Además de eso, si una función posee derivada en el sentido clásico, entonces ella coincidirá con la derivada distribucional, por lo tanto tenemos una generalización del concepto de derivada. En esta sección haremos una breve introducción al estudio de las distribuciones, presentando las notaciones y resultados que serán usados más adelante.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $k = (k_1, k_2, \ ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice, denotamos $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n$ y definimos

$$D^{\,k} = \frac{\partial^{\,|\,k\,|}}{\partial^{\,k_1} x_1\, \partial^{\,k_2} x_2 \ldots \partial^{\,k_n}\, x_n}$$

el operador derivación de orden $|k|$. Si $|k| = 0$, se define $D^0 u = u, \ \forall u.$

Denotamos por $D(\Omega)$ al espacio de las funciones de prueba en Ω.

Se define la distribución sobre Ω a toda forma lineal y continua $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es un espacio vectorial el cual se representa por $D^{'}(\Omega)$, llamado espacio de las distribuciones sobre Ω. En este espacio introducimos la siguiente noción de convergencia: Una sucesión $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset D^{'}(\Omega)$ converge para T en $D^{'}(\Omega)$ denotada $T_\nu \longrightarrow T$ en $D^{'}(\Omega)$, si para toda $\varphi \in D(\Omega)$ la sucesión numérica $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ en $\dot{\mathbb{R}}$.

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces T_u definida en $D(\Omega)$ por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

es una distribución sobre Ω .

Observación 1.1.12 *: Para ubicarnos en un contexto funcional, interpretaremos la función*

$$\begin{aligned} u: \ \ \Omega \times]0, T[&\longrightarrow \ \ \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto \ \ u = u(x,t) \end{aligned}$$

de las siguientes dos maneras

(i) *Para t fijado, consideramos la función*

$$\begin{aligned} u(t) \equiv u(\cdot\,,t) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u(t)(x) = u(x,t) \end{aligned}$$

por lo que $u(t)$ pertenece a un espacio (de Sobolev) V.

(ii) *Si, ahora hacemos variar t en el intervalo $[0,T]$, obtenemos la función*

$$\begin{aligned} u : [0,T] &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto u(t) \end{aligned}$$

que es una función en un espacio funcional abstracto (por ejemplo el espacio de Banach $L^p(0,T;V)$ que será visto más adelante).

Proposición 1.1.13 ***(Lema de Du Bois Raymond)*** *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces $T_u = 0$ si y solamente si $u = 0$ casi siempre en Ω.*

Demostración.- Ver [13 Pág. 10].

De esta proposición se tiene que T_u queda unívocamente determinada por u casi siempre sobre Ω, esto es, si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $T_u = T_v$ si y solamente si $u = v$ c.s. sobre Ω. Por este motivo se identifica a T_u como la distribución que define u.

Con esta proposición podemos demostrar la

Proposición 1.1.14 *Sea $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, tal que $u_v \to u$ en $L^p_{loc}(\Omega)$, entonces $u_\nu \to u$ en $D'(\Omega)$ $\quad (L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega))$*

Demostración.- Ver [15 Pág. 13].

Observación 1.1.15 *Notemos aquí que existen distribuciones no definidas por funciones $L^1_{loc}(\Omega)$, por ejemplo la función*

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \end{aligned}$$

donde se cumple $\delta_{x_0} \in D'(\Omega)$ pero $\delta_{x_0} \notin L^1_{loc}(\Omega)$.

De esta forma vemos que el concepto de distribución generaliza el de función localmente integrable.

Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$,se define la derivada de orden α de una distribución T sobre Ω como sigue.

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \, , \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Se verifica que $D^\alpha T$ es una distribución. Con esto tenemos que toda distribución sobre Ω posee derivada de todas las ordenes, que aun es una distribución sobre Ω. Además, el operador derivación $D^k : D^{'}(\Omega) \to D^{'}(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ es lineal y continuo.

1.1.4. Espacios de Sobolev

Consideremos Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ bien regular. Definimos el espacio de Sobolev de orden (m, p) como el conjunto

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \, ; \; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \;\; \forall \, |\alpha| \leq m\} \, ,$$

donde D^α es el operador de derivación de orden α, en el sentido de las distribuciones, dotado de la norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{\dfrac{1}{p}}$$

En especial, cuando $p = 2$, el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert que denotamos por $H^m(\Omega)$. El dato que, en general, $D(\Omega)$ no es denso en $H^m(\Omega)$ nos motiva definir un nuevo espacio.

$$H^m_0(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\,H^m(\Omega)},$$

que es un espacio de Hilbert dotado de la topología inducida del espacio $H^m(\Omega)$.

Representamos el dual de $H^m_0(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

La desigualdad de Poincaré nos permite establecer una norma en $H^1_0(\Omega)$ equivalente a la norma inducida por $H^1(\Omega)$.

Proposición 1.1.16 *(Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ acotado en alguna dirección x_i. Entonces*

$$|u| \leq (b-a)\,|\nabla u|, \;\; u \in H_0^1(\Omega)$$

donde $proy_i \Omega \subset (a,b)$.

Demostración.- Ver [15 Pag. 36].

Sea Ω acotado en $H_0^1(\Omega)$, definimos el funcional $|u|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ que resulta ser una norma equivalente a la norma natural de $H^1(\Omega)$.

Lema 1.1 $\exists\, C_0\,,\, C_1 > 0$ *tal que*

$$C_0 \,|\, u \,|_{H_0^1(\Omega)} \;\leq\; |\nabla\, u\,|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; C_1 \,|\, u\,|_{H_0^1(\Omega)}$$

Demostración.- Esto se sigue de la desigualdad de Poincaré.

Como consecuencia de este lema, $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$ y asociada a esta norma tenemos el producto interno

$$((u,v))_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

Proposición 1.1.17 *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1, con frontera acotada. sean $m \geq 1$ un entero y $1 \leq p < \infty$. Entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:*

Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *donde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, +\infty[$,

Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Demostración.- Ver [2 Pag. 168].

Proposición 1.1.18 *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1, con frontera acotada. Sean $1 \leq p \leq \infty$, entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:*

Si $1 \leq p < N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ *donde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

Si $p = N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, +\infty[$,

Si $p > N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Demostración.- Ver [2 Pag. 168].

Proposición 1.1.19 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1. Entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:*

Si $p < N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*[$ *donde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

Si $p = N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, +\infty[$

Si $p > N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$

Demostración.- Ver [2 Pag. 169].

Proposición 1.1.20 ***(Lions-Aubin)*** *Sean $B_0,\ B,\ B_1$ espacios de Banach, $B_0,\ B_1$ reflexivos, $B_0 \hookrightarrow\ B \hookrightarrow\ B_1$ con inmersiones continuas y $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B_1$ con inmersión compacta. Sea*

$$W[0,T] = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

donde $1 < p_0,\ p_1 < \infty$, *con la norma definida por*

$$\|u\|_{W[0,T]} = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

Entonces, $W[0,T]$ es un espacio de Banach reflexivo que está inmerso compactamente en $L^{p_0}(0,T;B_0)$.

Demostración.- Ver [16 Pag. 58].

Proposición 1.1.21 ***(Lema de Lions)*** *Sea $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^q\,(\Omega\times\,]0,T[)$ y $1<q<\infty$. Si*

a) $u_\nu \longrightarrow u$, *casi siempre en* $\Omega\times\,]0,T[$

b) $\|u_\nu\|_{L^q(\Omega\times]0,T[)}\leq c$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$

entonces, $u_\nu \rightharpoonup u$, *débil en* $L^q\,(\Omega\times\,]0,T[)$

Demostración.- Ver [12 Pag. 12].

1.1.5. Espacios $L^p(0,T;V)$ y Distribuciones Vectoriales

Sean $1\leq p<\infty$, V un espacio de Hilbert y $0<T<\infty$. Se define $L^p(0,T;V)$ como el espacio de Banach formado por la funciones vectoriales $u:(0,T)\to V$ tales que la aplicación $t\mapsto\|u(t)\|_V$ es medible y $\|u(t)\|_V\in L^p(0,T)$.

Cuando $1\leq p<\infty$ se define en $L^p(0,T;V)$ la norma:

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)}=\left[\int_0^T\|u(t)\|_V^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

y cuando $p=\infty$, tenemos

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)}=\sup_{0<t<T} ess\,\|u(t)\|_V\,.$$

Para el caso en que $p=2$, tenemos que $L^2(0,T;V)$ es un espacio de Hilbert, con el producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)}=\int_0^T(u(t),v(t))_V dt.$$

Un resultado importante respecto de los espacios $L^p(0,T;V)$ es el que permite hacer la identificación $(L^p(0,T;V))^{'}\approx L^q(0,T;V^{'})$, donde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$; para el caso en que $p=1$, se identifica $(L^1(0,T;V))^{'}\approx L^\infty(0,T;V^{'})$.

Haremos ahora el caso en que $p=1$ y $V=L^2(\Omega)$. Para eso definimos

$$F : L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \longrightarrow \left(L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime})\right)^{\prime}$$
$$u \longmapsto F(u)$$

donde

$$F(u) : L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\xi \longmapsto \langle F(u), \xi\rangle = \int_0^T \langle \xi(t), u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))^{\prime}\times L^2(\Omega)}\, dt.$$

F es lineal, continua y biyectiva. De este modo hacemos la identificación

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \approx \left(L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime})\right)^{\prime}$$

y los elementos de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ pueden ser vistos como elementos del dual de $L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime})$.

Entonces cuando decimos que

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ en } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

tenemos que

$$\langle u_\upsilon, \xi\rangle \longrightarrow \langle u, \xi\rangle_{(L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime}))^{\prime}\times L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime})}\,, \qquad \forall \xi \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime})$$

Lo que significa que

$$\int_0^T \langle \xi(t), u_\upsilon(t)\rangle_{(L^2(\Omega))^{\prime}\times L^2(\Omega)}\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle \xi(t), u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))^{\prime}\times L^2(\Omega)}\, dt,\ \forall \xi \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{\prime}) \tag{1.1}$$

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.22 *Si* $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *en* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, *entonces* $u_\nu \rightharpoonup u$ *en* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Demostración.-
Dado $h \in (L^2(0,T;L^2(\Omega)))^{\prime}$, por el teorema de Riesz existe una única $\varphi_h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\langle h, w\rangle_{(L^2(Q))^{\prime}\times L^2(Q)} = (\varphi_h, w)_{L^2(Q)} \ \ \forall w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$$

Consideramos

$$\begin{aligned} \xi : (0,T) &\longrightarrow (L^2(\Omega))^{'} \\ t &\longmapsto \xi(t) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \xi(t) : L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \quad &\longmapsto \quad \langle \xi(t), f \rangle_{(L^2(\Omega))' \times L^2(\Omega)} = (\varphi_h, f) \end{aligned}$$

Entonces $\xi \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^{'})$, por la hipótesis y considerando en (1.1) la función ξ arriba definida, se sigue

$$\int_0^T (\varphi_h, u_\upsilon(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (\varphi_h, u(t))\, dt$$

entre tanto, notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\varphi_h, u_\upsilon(t))\, dt &= \int_Q \varphi_h(x,t) u_\upsilon(x,t) dxdt = (\varphi_h, u_\upsilon)_{L^2(Q)} \\ &= \langle h, u_\upsilon \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))} \end{aligned}$$

análogamente

$$\int_0^T (\varphi_h, u(t))\, dt = \langle h, u \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

por lo tanto

$$\langle h, u_\upsilon \rangle \longrightarrow \langle h, u \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))} \quad , \quad \forall h \in (L^2(0,T;L^2(\Omega)))^{'}$$

i.e

$$u_\upsilon \rightharpoonup u \ \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

$\square$

Una distribución vectorial sobre $(0,T)$ es cualquier aplicación lineal y continua de $D(0,T)$ en V. El espacio de las distribuciones vectoriales será representado por $D^{'}(0,T;V)$

Consideremos $u \in L^p(0,T;V)$ y $\varphi \in D(0,T)$ la integral (integral de Bochner)

$$\int_0^T u(t)\varphi(t) dt$$

existe como un vector de V, entonces

$$\begin{aligned} T_u : D(0,T) &\longrightarrow V \\ \varphi &\longmapsto \int_0^T u(t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

es lineal y continua en el sentido de la convergencia de $D(0,T)$, esto es, T_u es una distribución vectorial sobre $(0,T)$. La distribución T_u es unívocamente determinada por u y con ello haremos la identificación

$$u \equiv T_u.$$

Se define la derivada de una distribución vectorial como:
Sean $u \in D^{'}(0,T;V)$ y $n \geq 0$, la derivada de orden n es dado por

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \varphi}{dt} \right\rangle \ , \forall \varphi \in D(0,T).$$

Sea V un espacio de Banach. Representamos por $C([0,T]\,;V)$ al espacio de las funciones vectoriales u de $[0,T]$ con valores en V, tales que $t \mapsto \|u(t)\|_V$ es continua en $[0,T]$. La norma en $C([0,T]\,;V)$ es dada por

$$\|u(t)\|_{C([0,T];V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V$$

Diremos que $u \in C_w([0,T]\,;V)$ cuando la aplicación $t \mapsto \langle \xi, u(t) \rangle_{V' \times V}$ es continua en $[0,T]$, $\forall \xi \in V$. Con respecto a estos espacios, tenemos.

Proposición 1.1.23 *Sean V y H dos espacios de Hilbert y $1 \leq p \leq \infty$. Si $V \hookrightarrow H$ y $u \in L^p(0,T;V)$ con $u' \in L^p(0,T;H)$, entonces $u \in C([0,T]\,;H) \cap C_w([0,T]\,;V)$.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [12].

1.2. Resultados Auxiliares

En esta sección mostraremos algunos resultados del análisis real, formulas de integración en relación a la convolución de funciones, también tenemos las desigualdades de la ecuación de Volterra usados en este trabajo.

1.2.1. Desigualdades Elementales

1. **Desigualdad de Young**

$$Sea\ 1 < p, q < \infty\ tal\ que\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ entonces\ \ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall\ a, b > 0 \quad (1.2)$$

2. **Desigualdad de Young con η**

$$ab \leq \eta a^p + c(\eta) b^q \qquad \forall a, b, \eta > 0 \quad (1.3)$$

para $c(\eta) = (\eta p)^{-\frac{p}{q}} q^{-1}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < +\infty$

3. **Desigualdad de Minkowski**

$$Si\ 1 \leq p, q \leq \infty\ \ y\ \ u, v \in L^p(\Omega)\ entonces\ \ \|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.4)$$

4. **Desigualdad para $L^p(\Omega)$**

$$Si\ 1 \leq p < \infty\ y\ a \geq 0\ ,\ b \geq 0\ \ entonces\ \ (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad (1.5)$$

Proposición 1.2.1 ***(Fórmula de Green)*** *Sea Ω un conjunto abierto acotado y bien regular de $\mathbb{R}^n$. Si $u, w \in H^1(\Omega)$, entonces para $1 \leq i \leq n$ tenemos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} w dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i d\Gamma,$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2,\ \ldots\ , \nu_n)$ y v denota el vector unitario exterior a Γ.

Si $u \in H^2(\Omega)$ y $w \in H^1(\Omega)$ tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx = -\int_\Omega \triangle u w dx + \int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial v} d\Gamma.$$

Demostración.- Ver [8 Pag. 102].

Proposición 1.2.2 ***(Fórmula de Green Generalizada)***

Para todo $u \in H^1(\Omega)$ y todo $w \in H^1(\Omega)$ se tiene

$$(\triangle u, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 w \ \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1);H^{1/2}(\Gamma_0)} \, .$$

Demostración.- Ver [18 Pag. 122].

Proposición 1.2.3 ***(Lema de Gronwall)*** *Sea $m \in L^1(a,b)$ tal que $m \geq 0$ c.s. en (a,b) y sea $c \geq 0$. Consideremos $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua verificando*

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t m(\xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad \forall t \in [a,b] \, .$$

Entonces

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_a^b m(\xi) d\xi}, \quad \forall t \in [a,b] \, .$$

Demostración.- Ver [19 Pag. 198].

1.2.2. Otros Resultados

En esta sección haremos una colección de resultados que serán utilizados más adelante. Para facilitar el análisis, introduciremos los siguientes operadores binarios

$$\begin{aligned}
(g * \triangle u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-s) \triangle u(x,s) ds \\
(g \Box \nabla u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-\tau) \left| \nabla u(x,t) - \nabla u(x,\tau) \right|^2 d\tau \\
(g \Box u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-\tau) \left| u(x,t) - u(x,\tau) \right|^2 d\tau \\
(g \Diamond u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-\tau) \left\{ u(x,\tau) - u(x,t) \right\} d\tau
\end{aligned}$$

Note que el signo de $g \Box u$ depende únicamente del signo de g. Con esta notación tenemos.

Lema 1.2 *Las relaciones introducidas satisfacen*

(a) $(g * u)(x,t) := \left(\int_0^t g(s) ds \right) u(x,t) + (g \Diamond u)(x,t)$

(b) $\left| (g \Diamond u)(x,t) \right|^2 \leq \left(\int_0^t |g(s)| \, ds \right) \left(|g| \, \Box u \right)(x,t)$

Demostración.- Es una consecuencia directa de la definición y de la desigualdad de Hölder. Del dato

$$\begin{aligned}
\textbf{(a)}\quad (g*u)(x,t) &= \int_0^t g(t-s)u(x,s)ds \\
&= \int_0^t g(t-s)\left\{u(x,s)-u(x,t)+u(x,t)\right\}ds \\
&= \int_0^t g(t-s)\left\{u(x,s)-u(x,t)\right\}ds + \int_0^t g(t-s)\left\{u(x,t)\right\}ds \\
&= \left(\int_0^t g(s)ds\right)u(x,t)+(g\Diamond u)(x,t)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\textbf{(b)}\quad |(g\Diamond u)(x,t)|^2 &= \left|\int_0^t g(t-s)\left\{u(x,s)-u(x,t)\right\}ds\right|^2 \\
&\leq \left[\int_0^t \left|g^{1/2}(t-s)\right|\left|g^{1/2}(t-s)\right||u(x,s)-u(x,t)|\right]^2 \\
&\leq \left[\left(\int_0^t \left|g^{1/2}(t-s)\right|^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t \left|g^{1/2}(t-s)\right|^2|u(x,s)-u(x,t)|^2 ds\right)^{1/2}\right]^2 \\
&\leq \left[\left(\int_0^t |g(t-s)|\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t |g(t-s)|\,|u(x,s)-u(x,t)|^2 ds\right)^{1/2}\right]^2 \\
&\leq \left(\int_0^t |g(t-s)|\,ds\right)\left(\int_0^t |g(t-s)|\,|u(x,s)-u(x,t)|^2 ds\right) \\
&\leq \left(\int_0^t |g(s)|\,ds\right)\left(|g|\,\Box u\right)(x,t)
\end{aligned}$$

$\Box$

Observación 1.2.4 *De* **(a)** *tenemos*

$$(g^{'}*u)(x,t) := \left(\int_0^t g^{'}(s)ds\right)u(x,t)+(g^{'}\Diamond u)(x,t)$$

$$g(0)u(x,t)+(g^{'}*u)(x,t)=g(t)u(x,t)+(g^{'}\Diamond u)(x,t) \tag{1.6}$$

De forma análoga

$$g^{'}(0)u(x,t)+(g^{''}*u)(x,t)=g^{'}(t)u(x,t)+(g^{''}\Diamond u)(x,t) \tag{1.7}$$

Lema 1.3 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Para algún $v \in C^1\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)$ se tiene.*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^t g\left(t-\tau\right)\nabla v d\tau \nabla v_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \left|\nabla v\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g' \Box v dx \\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega g\Box v dx - \left(\int_0^t g d\tau\right)\int_\Omega \left|\nabla v\right|^2 dx\right\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^t g\left(t-\tau\right) v d\tau v_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \left|v\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g' \Box v dx \\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega g\Box v dx - \left(\int_0^t g d\tau\right)\int_\Omega \left|v\right|^2 dx\right\}\end{aligned}$$

Demostración.- Para mostrar las identidades antes mencionadas és suficiente derivar las expresiones

$$\int_\Omega g\Box\nabla v dx \qquad \text{y} \qquad \int_\Omega g\Box v dx$$

Sabemos que

$$\int_\Omega g\Box\nabla v dx = \int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)\left|\nabla v(x,t) - \nabla v(x,\tau)\right|^2 d\tau dx$$

tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega g\Box\nabla v dx &= \int_\Omega g'\Box\nabla v dx + 2\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)\nabla v(x,t)\cdot\nabla v_t(x,t) d\tau \\ &- 2\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)\nabla v(x,t)\nabla v_t(x,t) d\tau dx \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t g(t-\tau)d\tau\right)\int_\Omega \nabla v(x,t)\nabla v_t(x,t)dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(t-\tau)d\tau\right)\int_\Omega \left|\nabla v(x,t)\right|^2 dx\right] \\ &- \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \left|\nabla v(x,t)\right|^2 dx \qquad (1.9)\end{aligned}$$

Sustituyendo (1.8) en (1.9) resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^t g\left(t-\tau\right)\nabla v d\tau \nabla v_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \left|\nabla v\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g' \Box\nabla v dx \\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega g\Box v dx - \left(\int_0^t g d\tau\right)\int_\Omega \left|\nabla v\right|^2 dx\right\}\end{aligned}$$

Análogamente, se prueba que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)\, v d\tau . v_t dx &= -\frac{1}{2} g(t) \int_\Omega |v|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g' \Box v dx \\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \int_\Omega g \Box v dx - \left(\int_0^t g d\tau \right) \int_\Omega |v|^2 \, dx \right\}\end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.4 *Para cualquier $g, u \in C^1(\mathbb{R})$ se verifica la siguiente identidad*

$$2\,[g * u]\, u' = g' \Box u - g(t)\, |u|^2 - \frac{d}{dt}\left\{ g \Box u - \left(\int_0^t g(s) ds \right) |u|^2 \right\}$$

Demostración.- Derivando la siguiente expresión

$$g \Box u - \left(\int_0^t g(s) ds \right) |u|^2$$

la igualdad del lema se verifica. $\square$

Lema 1.5 *Sea H un espacio de Hilbert. Consideremos la ecuación de Volterra.*

$$w(t) - \alpha \int_0^t g(t-s)\, w(s) ds = f(t)$$

donde $\alpha > 0$, $g \geq 0$; $g \in C^0([0,\infty[)$ satisfaciendo, $\alpha \int_0^\infty g(s)ds < 1$. Entonces para $f \in L^\infty(0,T;H)$, existe una única solución w satisfaciendo

$$w \in L^\infty(0,T;H)$$

Además de eso, existe una constante positiva $c > 0$, independiente de T, tal que

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq c\, \|f\|_{L^\infty(0,T;H)}$$

Demostración.- Sabemos que $L^\infty(0,T;H)$ es un espacio de Banach. Consideremos el operador

$$\begin{gathered} T : L^\infty(0,T;H) \longrightarrow L^\infty(0,T;H) \\ w(t) \mapsto T(w(t)) = f(t) + \alpha \int_0^t g(t-s)\, w(s) ds \end{gathered}$$

el cual es una contracción.

Sea $\{w_1(t), w_2(t)\ \} \in L^{\infty}(0,T;H)$, luego se tiene

$$\begin{aligned}
\|Tw_1(t) - Tw_2(t)\|_H &= \left\| \alpha \int_0^t g(t-s)\, ds\, (w_1(s) - w_2(s))\, ds \right\|_H \\
&\leq \alpha \|w_1 - w_2\|_{L^{\infty}(0,T;H)} \cdot \int_0^t g(t-s)\, ds \\
&\leq \|w_1 - w_2\|_{L^{\infty}(0,T;H)}
\end{aligned}$$

tomando el supremo esencial

$$\|Tw_1 - Tw_2\|_H \leq \|w_1 - w_2\|_{L^{\infty}(0,T;H)}$$

y aplicando el teorema del punto fijo de Banach, tenemos que existe una única solución $w \in L^{\infty}(0,T;H)$

Como $w(t) = f(t) + \alpha \displaystyle\int_0^t g(t-s)\, w(s) ds$ se concluye que

$$\|w\|_{L^{\infty}(0,T;H)} \leq c\, \|f\|_{L^{\infty}(0,T;H)}$$

$\square$

Observación 1.2.5 *El Lema (1.5) continua siendo válido si consideramos el espacio* $C^0([0,\infty[\,;H)$ *en lugar de* $L^{\infty}(0,T;H)$.

Capítulo 2

Existencia y unicidad de la Solución Débil de la Ecuación Viscoelástica

2.1. Existencia de la Solución Débil

Sea Ω un dominio acotado bien regular de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con frontera Γ. Consideremos el cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$ siendo $0 < T < \infty$; la frontera lateral del cilindro Q será representado por Σ, esto es $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

Consideremos el sistema viscoelástico

$$(*) \left\| \begin{array}{ll} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s) = 0 & \text{en } Q \\ u(x,t) = 0 \quad , & \text{en } \Sigma \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x)\,, & \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

donde

$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función no negativa, acotada y de clase C^2 tal que: $\ell = 1 - \displaystyle\int_0^\infty g d\tau$ y que satisface:

(1.) $-C_0 g(t) \leq g^{'}(t) \leq -C_1 g(t)$

(2.) $0 \leq g^{''}(t) \leq C_2 g(t)$

Además $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u^1 \in L^2(\Omega)$

Aquí $u = u(x,t)$ describe un campo escalar viscoelástico del tipo lineal.

Seguidamente definiremos lo que entendemos por solución débil de $(*)$

Definición 2.1.1 ***(Solución Débil)***
Decimos que la función $u :]0,T[\to H_0^1(\Omega)$ *es solución débil de* $(*)$ *si:*

(i) $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

(ii) $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

(iii) $u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$

(iv) $\dfrac{d}{dt}(u_t,w)+(\nabla u,\nabla w)-\displaystyle\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s),\nabla w)ds = 0,\ t>0\ \ \forall w \in H_0^1(\Omega)$ *en el sentido de* $D'(0,T)$

(v) $u(0) = u^0$ *en* $H_0^1(\Omega)$
$u_t(0) = u^1$ *en* $L^2(\Omega)$

Observación 2.1.2 *Representaremos por* $u(t)$ *la aplicación que a cada* x *en* Ω *asocia al número* $u(x,t)$*, asimismo la derivada respecto de* t *la representaremos por* u_t *o* $u_t(t)$

Observación 2.1.3 *De* (i) *,* (ii) *tiene sentido calcular* $u(0)$*. Similarmente* (iii) *y* (iv) *tiene sentido* $u_t(0)$

Teorema 2.1.4 ***(Existencia de la Solución Regular Débil)***
Para $u^0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ *,* $u^1 \in H_0^1(\Omega)$ *existe una única solución débil* $u : \Omega\times]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$ *de* $(*)$ *satisfaciendo*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$$

Demostración.- Será realizada mediante el Método de Faedo Galerkin, que consiste de las siguientes etapas:

Etapa 1. Construcción de las soluciones aproximadas en subespacios de dimensión finita.

Etapa 2. Estimativas a priori sobre las soluciones aproximadas.

Etapa 3. Pasaje al límite de las soluciones aproximadas.

Etapa 1. Construcción de las soluciones aproximadas.

Como $H_0^1(\Omega)$ es separable entonces admite una base Hilbertiana, sea $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ esta base de $H_0^1(\Omega)$, esto es:

i) Para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{w_1,\ w_2,\ \dots\ ,\ w_m\}$ es linealmente independiente

ii) Las combinaciones lineales finitas de los vectores w_j son densas en $H_0^1(\Omega)$

Ahora determinaremos la solución aproximada u^m de la ecuación (*).

Denotamos con $V_m = [w_1,\ w_2,\ \dots\ ,\ w_m]$ el subespacio generado por los primeros m vectores de la base, entonces u^m tiene la forma

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{jm}(t) w_j \tag{2.1}$$

donde los γ_{jm} son determinados de modo que

$$(u_{tt}^m, w_j) + (\nabla u^m, \nabla w_j) - \int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla w_j) ds = 0 \ para \ j = 1, 2, \dots, m \tag{2.2}$$

Asimismo, estableceremos las condiciones iniciales del sistema

Sea $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, luego puede ser aproximado por las combinaciones lineales finitas de w_j , es decir, existen α_{jm} en $\mathbb{R}$, para $j = 1, 2, \dots m$ tales que

$$u^{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \longrightarrow u^0 \text{ fuerte en } \ H_0^1(\Omega) \tag{2.3}$$

Claro esta, que una condición inicial natural para el sistema es:

$$u^m(0) = u^{0m}; \text{ esto es } \ \gamma_{jm}(0) = \alpha_{jm} \tag{2.4}$$

Del mismo modo, como u^1 fue colocado en $L^2(\Omega)$, podemos aproximarlo por las combinaciones lineales finitas de w_j, es decir, existen β_{jm} en $\mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots\ m$ tales que

$$u^{1m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_j \longrightarrow u^1 \text{ fuerte en } \ L^2(\Omega) \tag{2.5}$$

Luego la otra condición inicial será

$$u_t^m(0) = u^{1m};\ \text{esto es}\ \ \gamma_{jm}^{'}(0) = \beta_{jm} \tag{2.6}$$

Así tenemos el sistema aproximado

$$(P.A)\left\|\begin{array}{l} (u_{tt}^m, w_j) + (\nabla u^m, \nabla w_j) - \displaystyle\int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla w_j)\, ds = 0 \\ u^m(x,0) = u^{0\ m} \to u^0 \quad , \quad \text{en} \ \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u_t^m(x,0) = u^{1\ m} \to u^1 \quad , \quad \text{en} \ \ H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Para colocar el (PA) en la condición del Teorema de Caratheodory usamos la teoría de matrices de la siguiente manera.

De (2.1) se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_{im}^{''}(t)\,(w_i, w_j) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{im}(t)\,(\nabla w_i, \nabla w_j) - \sum_{j=1}^{m} (\nabla w_i, \nabla w_j) \int_0^t g(t-s)\gamma_{im}(s) ds = (F(t), w_j) \tag{2.8}$$

trabajando en forma matricial, se escribe

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1m}^{''}(t) \\ \gamma_{2m}^{''}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{mm}^{''}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{mm}(t) \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t g(t-s)\gamma_{1m}(s)ds \\ \int_0^t g(t-s)\gamma_{2m}(s)ds \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_0^t g(t-s)\gamma_{mm}(s)ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F(t), w_1) \\ (F(t), w_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (F(t), w_m) \end{bmatrix}$$

Denotando

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_{mm}(t) \end{bmatrix} \qquad ; \qquad A = [w_1, w_2, \ ... \ w_m]$$

$$B = \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & \cdot & \cdot & \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & \cdot & \cdot & \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & \cdot & \cdot & \cdot & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \quad ; \quad G(t) = \begin{bmatrix} (F(t), w_1) \\ (F(t), w_2) \\ . \\ . \\ . \\ (F(t), w_m) \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$Z^{''}(t) + BZ(t) - \int_0^t g(t-s)BZ(s)ds = G(t) \tag{2.9}$$

Ahora definiendo

$$\left\| \begin{array}{rcl} Y_1(t) & = & Z(t) \in \mathbb{R}^m \\ Y_2(t) & = & Z^{'}(t) \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. \tag{2.10}$$

y

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$$

se tiene

$$Y^{'}(t) = \begin{bmatrix} Y_1^{'}(t) \\ \\ Y_2^{'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1^{'}(t) \\ \\ Z_2^{''}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ \\ \int_0^t g(t-s)BY_1(s)ds - BY_1(s) + G(t) \end{bmatrix}$$

de esta forma, y de (2,7), obtenemos el siguiente problema de valor inicial

$$
\left\|
\begin{array}{l}
Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ G(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \int\limits_0^t g(t-s)BY_1(s)ds \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ \\ -B & 0 \end{bmatrix} Y(t) \\
\qquad\qquad\qquad Y'(0) = \begin{bmatrix} Z(0) \\ \\ Z'(0) \end{bmatrix} = 0
\end{array}
\right.
$$

así, podemos escribir

$$
\left\|
\begin{array}{lcl}
Y'(t) & = & f(t, Y(t)) \\
Y(0) & = & 0
\end{array}
\right. \tag{2.11}
$$

donde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ es definida por

$$
f(t, Y) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ G(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \int\limits_0^t g(t-s)BY_1(s)ds \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ \\ -B & 0 \end{bmatrix} Y(t) \tag{2.12}
$$

con

$$
\begin{aligned}
&Y = (\alpha_1, ...\alpha_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_{2m}) \\
&Y_1 = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \\
&Y_2 = (\alpha_{m+1}, ..., \alpha_{2m})
\end{aligned}
$$

Así f satisface las condiciones del teorema de Carateodhory, ver [16] a saber:

(i) Para cada $Y \in \mathbb{R}^n$ fijo, la aplicación $t \longmapsto f(t, Y)$ es medible

(ii) Para cada $t \in [0, T]$ fijo, la aplicación $Y \longmapsto f(t, Y)$ es continua

(iii) Para cada conjunto compacto $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$, existe una función $m_k(t)$ integrable en la $poj_t k$ y tal que

$$
\|f(t, x\|_{2m} \leq m_k(t), \qquad \forall (t, x) \in K \tag{2.13}
$$

Luego, existe una solución $Y(t) \in C^2\left(]0, T[\,; \mathbb{R}^n\right)$ del problema de valor inicial en el intervalo $[0, t_m]$, $0 \leq t_m < T$, siendo $Y(t)$ absolutamente continua y derivable c.s en $[0, t_m]$. $\square$

La siguiente estimativa a priori permitirá prolongar la solución a todo el intervalo $[0,T]$.

Etapa 2. Estimativas apriori

Estimativa I:

Multiplicando por $h'_{jm}(t)$ y tomando sumatoria desde $j=1$ hasta $j=m$ en el $(P.A)$ se obtiene

$$\left(u_{tt}^m, \sum_{j=1}^m h'_{jm}(t)w_j\right) + \left(\nabla u^m, \nabla \sum_{j=1}^m h'_{jm}(t)w_j\right) - \int_0^t g(t-s)\left(\nabla u^m(s), \nabla \sum_{j=1}^m h'_{jm}(t)w_j\right) ds = 0$$

$$(u_{tt}^m, u_t^m) + (\nabla u^m, \nabla u_t^m) - \int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m) ds = 0$$

Observe que esta ecuación se verifica en el sentido distribucional sobre $[0, t_m]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_t^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u^m(t)\right|^2 - \int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m(t)) ds = 0 \tag{2.14}$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m(t)) ds &= \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(x,s) \nabla u_t^m(x,t)) ds\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega g(t)\left|u_t^m(t)\right|^2 dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g\Box\nabla u^m dx - \int_\Omega \left(\int_0^t g ds\right)\left|\nabla u^m(t)\right|^2 dx\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_\Omega g'\Box\nabla u^m dx
\end{aligned} \tag{2.15}$$

donde

$$(g\Box v)(t) = \int_0^t g(t-s)\left|v(t) - v(s)\right|^2 ds \tag{2.16}$$

y

$$2(\eta * \phi)\phi' = -\eta(t)\phi^2 - \frac{d}{dt}\left\{\eta\Box\phi - \left(\int_0^t \eta ds\right)|\phi|^2\right\} + \eta'\Box\phi \tag{2.17}$$

Luego reemplazando (2,15) en (2,14), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_t^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u^m(t)\right|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Omega} g(t)\left|u_t^m(t)\right|^2 dx -$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g\Box\nabla u^m dx - \int_{\Omega}\left(\int_0^t g ds\right)\left|\nabla u^m(t)\right|^2 dx\right\} + \frac{1}{2}\int_{\Omega} g^{'}\Box\nabla u^m dx = 0$$

i.e

$$\left\{\frac{1}{2}\left|u_t^m(t)\right|^2 + (1-\int_0^t g ds)\left|\nabla u^m(t)\right|^2 - \frac{1}{2}\int_0^t g\Box\nabla u^m dx\right\} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} g^{'}\Box\nabla u^m dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} g(t)\left|u_t^m(t)\right|^2 dx \tag{2.18}$$

Haciendo

$$E_1(t,u^m) = \frac{1}{2}\left|u_t^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g ds\right)\left|\nabla u^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t g\Box\nabla u^m dx \tag{2.19}$$

se tiene

$$\frac{d}{dt}E_1(t,u^m) \leq 0 \tag{2.20}$$

i.e.

$$E_1(t,u^m(t)) \leq E_1(0,u^m) = \frac{1}{2}\left|u^{1\ m}(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u^{0\ m}(t)\right|^2 \leq C_1 + C_2 = CE_1(t,u^m(t)) \leq C \tag{2.21}$$

independiente de m; por tanto

$$\left|u_t^m(t)\right| \leq C \qquad \text{y} \qquad \left|\nabla u^m(t)\right| \leq C$$

i.e.

$$\left|u_t^m(t)\right|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \qquad \text{y} \qquad \left|\nabla u^m(t)\right|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \tag{2.22}$$

Así $\quad (u_m)$ es acotada en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)$

$\quad (u_m^{'})$ es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)$

Para obtener la regularidad de la solución, necesitamos una estimativa más.

Estimativa II.

Derivando el $(P.A)$ respecto de t (esto es posible por la linea siguiente que esta en (2.13))

$$(u_{ttt}^m, w_j) + (\nabla u_t^m, \nabla w_j) + \int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla w_j)ds + g(0)(\nabla u^m, \nabla w_j) -$$
$$-g(t)(\nabla u^{0\,m}(s), \nabla w_j) = 0$$

multiplicando por $h_{jm}^{''}$ y sumando desde $j=1$, hasta $j=m$, obtenemos

$$\left(u_{ttt}^m, \sum_{j=1}^m h_{jm}^{''}(t)w_j\right) + \left(\nabla u^m, \nabla\sum_{j=1}^m h_{jm}^{''}(t)w_j\right) + \int_0^t g^{'}(t-s)\left(\nabla u^m(s), \nabla\sum_{j=1}^m h_{jm}^{''}(t)w_j\right)ds +$$
$$+g(0)\left(\nabla u^m, \nabla\sum_{j=1}^m h_{jm}^{''}(t)w_j\right) = 0$$

luego

$$(u_{ttt}^m, u_{tt}^m) + (\nabla u^m, \nabla u_{tt}^m) + \int_0^t g'(t-s)\left(\nabla u^m(s), \nabla u_{tt}^m\right)ds + g(0)(\nabla u^m, \nabla u_{tt}^m) = 0 \qquad (2.23)$$

así, tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_{tt}^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u_t^m(t)\right|^2 + I_1 + I_2 = 0 \qquad (2.24)$$

donde

$$I_1 = \int_0^t g'(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_{tt}^m)ds, \qquad \text{e} \qquad I_2 = g(0)(\nabla u^m(s), \nabla u_{tt}^m)$$

pero

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g^{'}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m)ds\right) = \int_0^t \left[g^{''}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m) + g^{'}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_{tt}^m)\right]ds$$
$$+\, g^{'}(t-t)(\nabla u^m(t), \nabla u_t^m) - g^{'}(t-0)(\nabla u^m(0), \nabla u_t^m)0^{'}$$

luego

$$I_1 = \int_0^t g^{'}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_{tt}^m)ds$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g^{'}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m)ds\right) - \int_0^t g^{''}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m)ds - g^{'}(0)(\nabla u^m(t), \nabla u_t^m) \tag{2.25}$$

también

$$\frac{d}{dt}(\nabla u^m, \nabla u_t^m) = (\nabla u_t^m, \nabla u_t^m) + (\nabla u^m, \nabla u_{tt}^m)$$

$$g(0)\frac{d}{dt}(\nabla u^m, \nabla u_t^m) = g(0)(\nabla u_t^m, \nabla u_t^m) + g(0)(\nabla u^m, \nabla u_{tt}^m)$$

así, se tiene que

$$I_2 = g(0)(\nabla u^m, \nabla u_{tt}^m) = g(0)\frac{d}{dt}(\nabla u^m, \nabla u_t^m) - g(0)\left|\nabla u_t^m\right|^2 \tag{2.26}$$

Luego reemplazando (2.25) y (2.26) en (2.24) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left|u_{tt}^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u_t^m(t)\right|^2\right\} &= -I_1 - I_2 \\
\underbrace{\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left|u_{tt}^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u_t^m(t)\right|^2\right\}}_{E_2(t,u^m)} &= -g(0)\frac{d}{dt}(\nabla u^m, \nabla u_t^m) + g(0)\left|\nabla u_t^m\right|^2 - \\
&- \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g^{'}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m)ds\right) + \\
&+ \int_0^t g^{''}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m)ds + g^{'}(0)(\nabla u^m(t), \nabla u_t^m)
\end{aligned}$$

haciendo

$$E_2(t, u^m) = \frac{1}{2}\left|u_{tt}^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u_t^m(t)\right|^2 \tag{2.27}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{E_2(t, u^m)\right\} &= -g(0)\frac{d}{dt}(\nabla u^m, \nabla u_t^m) + g(0)\left|\nabla u_t^m\right|^2 - \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g^{'}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m)ds\right) + \\
&+ \int_0^t g^{''}(t-s)(\nabla u^m(s), \nabla u_t^m)ds + g^{'}(0)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla u^m(t)\right|^2
\end{aligned}$$

Ahora, integrando de 0 a t

$$\begin{aligned}
E_2(t,u^m)-E_2(0,u^m) &= -g(0)(\nabla u^m(t),\nabla u_t^m(t))+g(0)(\nabla u^m(0),\nabla u_t^m(0))+g(0)\int_0^t |\nabla u_t^m|^2\,ds \\
&- \int_0^t g^{'}(t-\nabla u^m(s),s)(\nabla u_t^m)ds+\int_0^t\int_0^\tau g^{''}(\tau-s)(\nabla u^m(s),\nabla u_t^m(s))dsd\tau \\
&+ g^{'}(0)\frac{1}{2}|\nabla u^m(t)|^2-g^{'}(0)\frac{1}{2}|\nabla u^m(0)|^2
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
E_2(t,u^m)-E_2(0,u^m) &= -g(0)(\nabla u^m(t),\nabla u_t^m(t))+g(0)(\nabla u^{0\ m},\nabla u_t^{1\ m})+g(0)\int_0^t |\nabla u_t^m|^2\,ds \\
&- \int_0^t g^{'}(t-s)(\nabla u^m(s),\nabla u_t^m)ds+\int_0^t\int_0^\tau g^{''}(\tau-s)(\nabla u^m(s),\nabla u_t^m(s))dsd\tau \\
&+ g^{'}(0)\frac{1}{2}|\nabla u^m(t)|^2-g^{'}(0)\frac{1}{2}\left|\nabla u^{0\ m}\right|^2 \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

pero los términos

$$g(0)(\nabla u^{0\ m},\nabla u_t^{1\ m})\leq C_1$$

$$g^{'}(0)\frac{1}{2}|\nabla u^{0\ m}|^2\leq C_2$$

y por la estimativa I, se tiene

$$g^{'}(0)\frac{1}{2}|\nabla u^m|^2\leq C_3$$

$$|\nabla u^m(t),\nabla u_t^m(t)|\leq\frac{\epsilon}{2}|\nabla u_t^m(t)|^2+\frac{1}{2\epsilon}|\nabla u^m(t)|^2\leq\epsilon E_2(t,u^m)$$

y además, se tiene la siguiente:

Afirmación 1

$$\int_0^t g^{'}(t-\tau)(\nabla u^m(\tau),\nabla u_t^m)d\tau\leq\frac{C_1}{4\eta}|g|_{L^1(0,+\infty)}|g|_{L^\infty(0,+\infty)}\int_0^t|\nabla u^m(\tau)|^2\,d\tau+\eta\,|\nabla u_t^m|^2\ ,\ \eta>0 \qquad (2.29)$$

Prueba

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g'(t-\tau)(\nabla u^m(\tau),\nabla u_t^m)d\tau &\le \left|\int_0^t g'(t-\tau)(\nabla u^m(\tau),\nabla u_t^m)d\tau\right| \\
&\le \int_0^t \left|g'(t-\tau)\right| |\nabla u^m(\tau)|\,|\nabla u_t^m|\,d\tau \\
&\le -\int_0^t g'(t-\tau)\,|\nabla u^m(\tau)|\,|\nabla u_t^m|\,d\tau \\
&\le C_1\int_0^t g'(t-\tau)\,|\nabla u^m(\tau)|\,|\nabla u_t^m|\,d\tau
\end{aligned}
$$

pues $\quad C_0\, g \le -g' \le C_1\, g$

$$
\int_0^t g'(t-\tau)(\nabla u^m(\tau),\nabla u_t^m)d\tau \le C_1\,|\nabla u_t^m| \int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla u^m(\tau)|\,d\tau
$$

También, sabemos que

$$
ab \le \frac{1}{4\eta}a^2 + \eta b^2 \qquad \forall\ \eta > 0, \qquad \forall\ a,b \ge 0
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g'(t-\tau)(\nabla u^m(\tau),\nabla u_t^m)d\tau &\le \frac{C_1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla u^m(\tau)|\,d\tau\right)^2 + \eta\,|\nabla u_t^m(\tau)|^2 \\
&\le \frac{C_1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-\tau)d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla u^m(\tau)|^2\,d\tau\right) + \eta\,|\nabla u_t^m(\tau)|^2 \\
&\le \frac{C_1}{4\eta}\,|g|_{L^1(0,\infty)}\,|g|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t |\nabla u^m(\tau)|^2\,d\tau + \eta\,|\nabla u_t^m(\tau)|^2 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Luego en (2.28)

$$\begin{aligned} E_2(t,u^m)-E_2(0,u^m) &\leq \epsilon E_2(t,u^m)+C_1+g(0)\int_0^t |\nabla u_t^m|^2\,ds- \\ &- \frac{C_1}{4\eta}|g|_{L^1(0,+\infty)}|g|_{L^\infty(0,+\infty)}\int_0^t |\nabla u^m(s)|^2\,ds+\eta\,|\nabla u_t^m|^2 \\ &+ \int_0^t\int_0^\tau g''(\tau-s)(\nabla u^m(s),\nabla u_t^m(s))ds d\tau + C_3 - C_2 \qquad (2.30) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)E_2(t,u^m) &= E_2(t,u^m)-\varepsilon E_2(t,u^m)\leq E_2(0,u^m)+g(0)\int_0^t |\nabla u_t^m|^2\,ds- \\ &- \frac{C_1}{4\eta}|g|_{L^1(0,+\infty)}|g|_{L^\infty(0,+\infty)}\int_0^t |\nabla u^m(s)|^2\,ds+\eta\,|\nabla u_t^m|^2+ \\ &+ \int_0^t\int_0^\tau g''(\tau-s)(\nabla u^m(s),\nabla u_t^m(s))ds d\tau + C_3 - C_2 \qquad (2.31) \end{aligned}$$

Ahora acotamos $E_2(0,u^m)$, para esto requerimos acotar $|u_{tt}^m(0)|$, lo que haremos seguidamente.

En el $(P.A)$ hacemos $t\longrightarrow 0^+$, y luego multiplicamos por $h_{jm}''(0)$ y sumando desde $j=1$, hasta $j=m$, obtenemos

$$(u_{tt}^m(0),u_{tt}(0))+(\nabla u^m(0),\nabla u_{tt}(0))=0$$

$$|u_{tt}^m(0)|^2-(\triangle u^{0\ m} u_{tt}^{0\ m})=0$$

luego

$$|u_{tt}^m(0)|^2\leq \frac{1}{2}|\triangle u^{0\ m}|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}|u_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega)}$$

i.e

$$|u_{tt}^m(0)| \leq \frac{1}{2}\left|\triangle u^{0\ m}\right| = \left|u^{0\ m}\right|_{H_0^1\cap H^2} \leq C \tag{2.32}$$

Gracias a esta acotación, tenemos

$$E_1(0,u^m) = \frac{1}{2}\left|u_{tt}^m(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u^{1m}\right|^2 \leq C \tag{2.33}$$

Por lo que de (2.31) y (2.33) se tiene

$$E_2(t,u^m) \leq C \tag{2.34}$$

Lo que concluye la estimatima II. $\square$

2.2. Pasaje al límite

De las estimativas a priori deducimos la existencia de una subsucesión de $\{u_m\}$ que denotaremos de la misma manera, y de una función u tal que:

$$u_m^{''} \rightharpoonup u^{''} \text{ débilmente en } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

$$\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u \text{ débilmente en } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

De las convergencias débiles podemos pasar al límite cuando $m \to +\infty$ de modo que se obtiene:

$$\int_0^T (u^{''}(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla w_j)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla w_j)d\tau\theta(t)dt = 0$$

Como las combinaciones lineales finitas de los w_j son densas en V la identidad anterior permanece válida para toda $w \in V$, o sea

$$\int_0^T (u^{''}(t),w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla w)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla w)d\tau\theta(t)dt = 0$$

de esta desigualdad y considerando que el conjunto

$$\{\varphi\theta : \varphi \in D(\Omega), \theta \in D(0,T)\}$$

es total en $D(\Omega \times (0,T))$, y resulta que

$$u^{''} - \triangle \left(u - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) = 0 \text{ en } D^{'}(\Omega \times (0,T)) \tag{2.35}$$

Ahora como $u^{''} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, se tiene que

$$\triangle \left(u - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Luego $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ y la igualdad (2.35) se da como

$$u^{''} - \triangle \left(u - \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) = 0 \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Condiciones iniciales

Observemos que

$$u \in L^\infty_{loc}(0,\infty;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

$$u_t \in L^\infty_{loc}(0,\infty;H_0^1(\Omega))$$

y

$$u_{tt} \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$$

y por la proposición (1.14) se tiene que

$$u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega) \cap C_w([0,T];H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

y

$$u_t \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C_w([0,T];H_0^1(\Omega))$$

de esta forma tiene sentido $u(0)$ y $u_t(0)$.

Sea $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ y $\theta(T) = 0$. De las estimativas a priori obtenemos una subsucesión (u_η) de (u_m) tal que

$$u_\eta^{'} \rightharpoonup u^{'} \text{ débilmente en } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

De ahí resulta que

$$\int\limits_0^T (u_\eta^{'}(t), w)\theta(t)dt \rightarrow \int\limits_0^T (u^{'}(t), w)\theta(t)dt$$

integrando por partes, obtenemos

$$-(u_\eta(0), w) - \int\limits_0^T (u_\eta(t), w)\theta^{'}(t)dt \rightarrow -(u(0), w) - \int\limits_0^T (u(t), w)\theta^{'}(t)dt$$

Como

$$u_\eta \rightharpoonup u \text{ débilmente en } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

Concluimos que

$$-(u_\eta(0), w) \rightarrow -(u(0), w)$$

Por el dato del problema

$$-(u_\eta(0), w) \rightarrow -(u^0, w)$$

y por la unicidad, se tiene que

$$u(0) = u^0$$

Analogamente, del dato se tiene que

$$u_\eta^{''} \rightharpoonup u^{''} \text{ débilmente en } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

Concluimos que $u^{'}(0) = 0$

2.3. Unicidad

Sea y_1 e y_2 dos soluciones regulares para el problema (*). Entonces, $z = y_1 - y_2$ verifica

$$(z''(t), w) + (\nabla z(t), \nabla w) + \int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla z(t), \nabla w)\,dt = 0 \tag{2.36}$$

para todo $w \in V$.

Sustituyendo $w = z'(t)$ en (2.40) y observando que g es monotona obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,|\nabla z(t)|^2\right\} - \int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla z(t), \nabla z'(t))\,dt = 0$$

Como

$$\begin{aligned}\int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla z(\tau), \nabla z'(\tau))\,d\tau &= -h(0)\,|\nabla z(t)|^2 - \int_0^t h'(t-\tau)\,(\nabla z(\tau), \nabla z(\tau))\,d\tau \\ &+ \frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla z(\tau), \nabla z(\tau))\,d\tau\right)\end{aligned}$$

entonces, teniendo en consideración la hipotesis (H.5), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,|\nabla z(t)|^2\right\} &\leq \frac{\xi_1^2}{2}\,|\nabla z(t)|^2 + \frac{1}{2}\,\|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau)\,|\nabla z(\tau)|^2\,d\tau \\ &+ \frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla z(\tau), \nabla z(\tau))\,d\tau\right)\end{aligned}$$

Integrando la última desigualdad sobre $(0, t)$ deducimos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,|z'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,|\nabla z(t)|^2 &\leq \frac{\xi_1^2}{2} \int_0^t |\nabla z(s)|^2\,ds + \frac{1}{2}\,\|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z(\tau)|^2\,d\tau \\ &+ \int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla z(\tau), \nabla z(\tau))\,d\tau \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ahora, como para un $\eta > 0$ arbitrario tenemos

$$\int_0^t h(t-\tau)\,(\nabla z(\tau), \nabla z(\tau))\,d\tau \leq \eta\,|\nabla z(t)|^2 + \frac{1}{4\eta}\,\|h\|_{L^1(0,\infty)}\,\|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z(\tau)|^2\,d\tau$$

de (2.37) y utilizando el lema de Gronwall (lema 1.2.3) se concluye que

$$|z'(t)| = |\nabla z(t)| = 0$$

Esto finaliza la prueba. $\square$

Capítulo 3

Decaimiento exponencial

En esta sección estudiaremos el comportamiento asintotico de la solución. Probaremos que la solución decae exponencialmente, cuando el nucleo g decae exponencialmente.
Nuestra ecuación de estudio es:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = 0 \qquad \text{en} \ \ \Omega\times]0,+\infty[\tag{3.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{en} \ \ \Gamma\times]0,+\infty[\tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.3}$$

$$u_t(x,0) = u^1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.4}$$

donde u denota el desplazamiento transversal de ondas y $g > 0$ es una función satisfaciendo

$$-c_0\, g(t) \leq g'(t) \leq -c_1\, g(t) \ \ , \ \ 0 \leq g''(t) \leq c_2\, g(t) \tag{3.5}$$

para alguna constante $c_j : j = 0, 1, 2$
También hacemos

$$\ell = 1 - \int_0^\infty g(s)ds > 0 \tag{3.6}$$

Lema 3.1 *Para $v \in C^1(0,T;H^1(\Omega))$, se tiene*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla v(s)ds \cdot \nabla v_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \frac{1}{2}g' \,\square\, \nabla v \\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g \,\square\, \nabla v - (\int_0^t g(s)ds)\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx\right] \end{aligned}$$

Lema 3.2 *Asumamos que los datos iniciales* $\{u_0, u_1\} \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$. *Entonces la solución de (*) satisface*

$$\frac{d}{dt}E(t;u) = -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}g'\,\Box\,\nabla u \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}E(t;u_t) = -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}g'\,\Box\,\nabla u_t - g(t)\int_\Omega \Delta u_0 u_{tt}dx \tag{3.8}$$

Demostración.- Multiplicando la ecuación (3.1) por u_t y aplicando la formula de Green se obtiene:

$$\frac{1}{2}\left\{\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right\} - \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_t dx = 0 \tag{3.9}$$

Usando el Lema (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}g'\,\Box\,\nabla u\\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g\,\Box\,\nabla u - (\int_0^t g(s)ds)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right]\end{aligned}$$

Sustituyendo en la identidad anterior (3.9) obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_t|^2\,dx + (1-\int_0^t g(s)ds)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + g\Box\nabla u\right\} = \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}g^{'}\Box\nabla u \tag{3.10}$$

de esto obtenemos

$$\frac{d}{dt}E(t;u) = -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}g'\,\Box\,\nabla u$$

que es la primera identidad del Lema.

Ahora derivando la ecuación (3.1) respecto al tiempo, tenemos

$$u_{ttt} - \Delta u_t + g(0)\Delta u + \int_0^t g'(t-s)\Delta u(s)ds = 0 \tag{3.11}$$

Realizando la integración por partes sobre el término convolución, encontramos que

$$u_{ttt} - \Delta u_t + \int_0^t g(t-s)\Delta u_t(s)ds = -g(t)\Delta u_0$$

Observando que ésta ecuación se verifica en el sentido débil, se tiene

$$(u_{ttt},\varphi) - (\Delta u_t,\varphi) + \int_0^t g(t-s)(\Delta u_t(s),\varphi)ds = -g(t)(\Delta u_0,\varphi) \quad \forall\varphi\in D(0,T,D(0,T))$$

Tomando $\varphi = u_{tt}$ y usando el mismo razonamiento anterior tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + (1-\int_0^t g(s)ds)\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + g\Box\nabla u_t\right\} &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx \\ &+ \frac{1}{2}g'\Box\nabla u_t - g(t)\int_\Omega \Delta u_0 u_{tt}dx\end{aligned}$$

Así se tiene

$$\frac{d}{dt}E(t;u_t) = -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}g'\,\Box\,\nabla u_t - g(t)\int_\Omega \Delta u_0 u_{tt}dx$$

$\Box$

Para probar el decaimiento de la solución, definimos los siguienetes funcionales:

$$K(t;u) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + 2\int_\Omega\int_0^t f(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_t dx\right\}$$

$$I(t;u) = \int_\Omega u_{tt}u_t dx + \frac{1}{2}g'\Box\nabla u - g(t)\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx$$

donde $f(t) = g(0)g(t) + g^{'}(t)$

Lema 3.3 *Bajo las hipotesis del Lema 3.2, se tiene*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{K(t;u) + \frac{2}{3}g(0)I(t;u)\right\} &\leq -\frac{g(0)}{3}\left\{\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx\right\} \\ &+ \left\{\frac{3(c_0 g(0)+c_2)^2}{2} + \frac{c_0 g(0)}{3}\right\}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\ &+ \left\{\frac{3(c_0 g(0)+c_2)^2}{2g(0)} + \frac{c_2 g(0)}{3}\right\}g\Box\nabla u\end{aligned}$$

Demostración.- Substituyendo el término Δu de la ecuación (3.1) en la ecuación (3.11) se tiene obtiene

$$u_{ttt} - \Delta u_t + g(0)u_{tt} - g(0)\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + \int_0^t g'(t-s)\Delta u(s)ds = 0 \qquad (3.12)$$

Multiplicando la ecuación anterior por u_{tt} e integrando sobre Ω, tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx\right\} + g(0)\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2\,dx + \int_\Omega\int_0^t f(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_{tt}dx = 0$$

y desde que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^t f(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_{tt}dx &= \frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \int_0^t f(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_t dx\right\}\\ &- \int_\Omega \int_0^t f^{'}(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_t dx - f(0)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_t dx\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + 2\int_\Omega\int_0^t f(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_t dx\right\} &= -g(0)\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2\,dx\\ &- \int_\Omega\int_0^t f^{'}(t-s)[\nabla u(s)\\ &- \nabla u(t)]ds\cdot\nabla u_t dx\\ &- f(t)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_t dx\end{aligned}$$

Haciendo uso de la desigualdad

$$\left|\int_\Omega\int_0^t g(t-s)[\nabla\phi(s)-\nabla\phi(t)]ds\cdot\nabla\varphi dx\right| \leq \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)^{1/2}(g\Box\nabla\phi)^{1/2}$$

Concluimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + 2\int_\Omega\int_0^t f(t-s)\nabla u(s)ds\cdot\nabla u_t dx\right\} \leq -g(0)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx$$

$$+\frac{g(0)}{3}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{3}{2}g(t)(g(0)+c_0)^2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{3}{2}\frac{(c_0 g(0)+c_2)^2}{g(0)}g\Box\nabla u \qquad (3.13)$$

Luego

$$\frac{d}{dt}K(t;u) \leq -g(0)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx +$$

$$+\frac{g(0)}{3}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{3}{2}g(t)(g(0)+c_0)^2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{3}{2}\frac{(c_0 g(0)+c_2)^2}{g(0)}g\Box\nabla u \qquad (3.14)$$

Sobre la otra parte, multiplicando la ecuación (3.11) por u_t, e integrnado sobre Ω y usando el Lema 3.1 se tiene

$$\frac{d}{dt}I(t;u) = -\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx - \frac{1}{2}g^{'}(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}g^{''}\Box\nabla u$$

Desde la hipótesis (3.5) obtenemos

$$\frac{d}{dt}I(t;u) \leq -\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 \, dx + \frac{c_0}{2} g(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{c_2}{2} g\Box\nabla u$$

Finalmente, inspeccionando a (3.14) y desde las dos ultimas desigualdades se sigue nuestra conclusión. □

Introduzcamos el funcional

$$J(t;\varphi) = \int_{\Omega} \varphi_t \varphi dx \tag{3.15}$$

Lema 3.4 *Bajo la misma hipotesis del Lema 3.2 se tiene*

$$\frac{d}{dt}J(t;\varphi) \leq \alpha_0 \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 \, dx - \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2\beta} \left(\int_0^t g(s) ds \right) g\Box\nabla u \tag{3.16}$$

La prueba de este Lema es similar a la prueba del Lema 3.3, por esta razón la omitiremos aquí.

Introduzcamos los funcionales

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t;u) + N_2 E(t;u_t) + K(t;u) + \frac{2g(0)}{3} I(t;u) + \frac{g(0)}{12\alpha_0} J(t;u) \tag{3.17}$$

$$\mathcal{N}(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u_{tt}|^2 \, dx + g\Box\nabla u + g\Box\nabla u_t \tag{3.18}$$

No es dificultuoso ver que existen constantes positivos q_0 y q_1 para el cual

$$q_0 \mathcal{N}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq q_1 \mathcal{N}(t) \tag{3.19}$$

Mostraremos despues que el funcional $\mathcal{L}$ satisface la desigualdad del siguiente Lema.

Lema 3.5 *Sea f una función real positivo de clase C^1. Si existen constantes positivos γ_0, γ_1 y c_0 tal que*

$$f^{'}(t) \leq -\gamma_0 f(t) + c_0 \, e^{-\gamma_1 t} \tag{3.20}$$

Entonces existen constantes positivos γ y c tal que

$$f(t) \leq (f(0) + c) \, e^{-\gamma t} \tag{3.21}$$

Demostración.- Supongamos que $\gamma_0 < \gamma_1$ y definamos

$$F(t) := f(t) + \frac{c_0}{\gamma_0 - \gamma_1}\, e^{-\gamma_1 t} \tag{3.22}$$

Entonces, derivando se tiene

$$F^{'}(t) = f^{'}(t) + \frac{\gamma_1 c_0}{\gamma_0 - \gamma_1}\, e^{-\gamma_1 t} \leq -\gamma_0 F(t) \tag{3.23}$$

Integrando desde 0 a t llegamos a

$$F(t) \leq F(0)\, e^{-\gamma_0 t}$$

$$f(t) \leq (f(0) + \frac{c_0}{\gamma_0 - \gamma_1})\, e^{-\gamma_0 t}. \tag{3.24}$$

Ahora, asumiremos que $\gamma_0 \geq \gamma_1$. En estas condiciones tenemos

$$f^{'}(t) \leq -\gamma_1 f(t) + c_0\, e^{-\gamma_1 t}$$

$$\left[e^{\gamma_1 t} f(t) \right]^{'} \leq c_0 \tag{3.25}$$

Integrando desde 0 a t obtenemos

$$f(t) \leq (f(0) + c_0 t)\, e^{-\gamma_1 t}$$

Desde que $t \leq (\gamma_1 - \epsilon)\, e^{(\gamma_1 - \epsilon)t}$ para cualquier $0 < \epsilon < \gamma_1$ concluimos que

$$f(t) \leq [f(0) + c_0(\gamma_1 - \epsilon)]\, e^{-\epsilon t}$$

Esto completa la prueba. $\square$

Ahora mostraremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.0.1 *Sean los datos iniciales $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, y que el nucleo g satisface la condición (3.5) y (3.6). Entonces existen constantes positivas k_1 y k_2 tal que*

$$E(t; u) + E(t; u_t) \leq k_1 \{E(0; u)) + E(0; u_t)\}\, e^{-k_2 t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN.- Probaremos este resultado para soluciones fuertes, esto es, para soluciones con valor inicial $(u_0, v_0) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$ y $(u_1, v_1) \in [H_0^1(\Omega)]^2$. Nuestra conclusión sigue por argumento de densidad estandar. De los Lemas 3.2 , 3.3 y 3.4 obtenemos.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -c_1\mathcal{N}(t) + c_2 g(t)$$

Usando el decaimiento exponencial de g y Lema 3.5 se obtiene

$$\mathcal{L}(t) \leq \{\mathcal{L}(0) + c\}\, e^{-kt}, \qquad \forall t \geq 0$$

La conclusión del teorema sigue de (3.19) $\square$

Como una consecuencia del teorema 3.0.1 tenemos que la energía de primer orden también decae eponencialmente. Resumiremos este resultado en el siguiente corolario.

Corolario 3.0.1 *Con las hipotesis del teorema 3.0.1, se tiene que existe constantes positivas c y k tal que*

$$E(t; u) \leq cE(0; u)e^{-kt}, \qquad \forall t \geq 0$$

$\square$

Capítulo 4

Conclusiones

- Para datos $u^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u^1 \in H_0^1(\Omega)$ se obtiene solución fuerte al sistema viscoelastico. Además, vía densidad y continuidad para datos $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u^1 \in L^2(\Omega)$, podemos conseguir solución débil.

- Con las hipotesis mencionadas, se obtiene unicidad de la solución (fuerte ó débil).

- La energía del sistema decae según como decae el núcleo de memoria. Hemos probado que si el nucleo g decae exponencialmente, la energia del sistema decae exponencialmente.

  La metodología investigada para obtener la existencia de soluciones al problema (*), puede aplicarse a problemas no lineales y con operadores no lineales del tipo Kirchhoff, que tengan términos de memoria.

  Así mismo, podemos investigar el comportamiento asintotico de las soluciones de estos sistemas no lineales, con otros métodos, por ejemplo el de las desigualdades integrales, debido a Komornik [9]. Sería interesante investigar el problema (*), con operadores del tipo Laplaciano fraccional de Kirchhoff [ ].

Bibliografía

[1] Barbosa Sobrinho, J. Muñoz Rivera., J.E. **Existence and uniform Rates of Decay for Contact Problems in Viscoelasticity**. Appl Anal. v.67, n.3-4 (1997), 3-4.

[2] Brezis H. **Analyse functionalle, Theorie et Applications**. Collection Mathematiques Appliquées Pour la Maitrise. Masson (1987).

[3] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Prates Filho, J.S., Soriano, J.A. **Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping**, Diff. and Integral Equations v. 14, n. 1, p. 85-116, 2001.

[4] Coleman, B.D. and W. Noll **Fundation of linear Viscoelasticity**, Rev. Mod. Phys, 33 (1961)239-249.

[5] Dafermos, C.M. **An Abstrac Volterra Equation with Aplication to Linear Viscoelasticity**, J. Diferential Equations v.7, p. 554-589, 1970.

[6] Dafermos, C.M. **Asymtotic Stability in Viscoelasticity**, Arch. Rat. Mech. Anal. v.37, p. 297-308, 1970.

[7] Fatori, L. H., Muños Rivera, J.E. **Smoothing effect and propagations of singularities for viscoelastic plates**, J. Math. Anal. Appl., v. 206 n.2, p. 397-427, 1997.

[8] Fatori, L. H., Muños Rivera, J.E. **Energy dacay for hyperbolic thermoelastic systems of memory**, Quart. Appl. Math., v. 59 n.3, p. 441-458, 2001.

[9] Jiam, S. Muñoz Rivera, J. E. **A Global Existence Theorem for the Dirichlet Problem in Nonliner n-Dimensional Viscoelastic**, Differential and Integral Equation, v.9, n.4, p. 791-810, 1996.

[10] Komornik, V. **Exact Controllability and Stabilization**. The Multiplier Method. Paris: John Wiley and Sons-Masson, 1994.

[11] Komornik, V. , Zuazua, E. **A Direct Method for Boundary Stabilization of the Wave Equation**, J. math. Pures et Appl. v.69, p.33-54 1990.

[12] Lions, J. L. **On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics**. Contemporary Development in Continuum Machanics and Partial Differential Equation. Edited by G.M. de la Penha and L.A. Medeiros, North-Holland Amsterdam. pg 285-346. 1977.

[13] Lions, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires**. Paris: Dunod, 1969.

[14] Mauro de Lima Santos. **Decay Rates For Solutions of a System of Wave Equations With Memory**, Electronic Journal of Differential Equation Vol. 2002 N° 38 P:1-17.

[15] Medeiros, L. A. y Milla Miranda M. **Espacos de Sobolev, Iniciacao aos problemas elipticos noa Homogeneos**. IM- UFRJ, 2000.

[16] Medeiros, L. A. Rivera, P. H. **Espacos de Sobolev e Equacoes Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos, IM- UFRJ, 1975.

[17] Pérez Salvatierra, Alfonso **Decaimento de Solucoes de Equacoes Parcialmente Viscoelasticas**, IM. UFRJ Rio de Janeiro 1997, Brasil .

[18] Regiana Aparecida de Almeida. **Existencia e taxas de Decaimiento uniforme para Problemas Viscoelásticos com Dissipacao Nao Linear Na Frontera**. UEM. Maringa 2002 Brazil.

[19] Renardy, M., Hrusa, W.J., Nohel, J.A. **Mathematical Problems in Viscoelasticity**, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math. 35, Longman Sci. Tech., 1987.

[20] Said Berrimi, Salim A. Messaoudi **Existence and Decay of Solutions of a Viscoelastic Equation With a Nonlinear Source**; Elsevier - Nonlinear Analysis. Gu. (2006) 2314-2331.

[21] Salim A. Messaoudi **Blow-up of positive - Initial - Energy Solutions of a Nonlinear Viscoelastic Hyperbolic Equation**, Elsevier Journal of Mathematical Analysis and Aplications 320 (2006) 902-915.

[22] Volterra, V. **Sui Fenomeni Creditari**, Rend. Accad. Lincci, (ser V) 33 (1913) 529-539.